ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СЕТОЧНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С M-МАТРИЦАМИ

А.В.Лапин, Д.О.Соловьев

НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева

Казанского государственного университета

420008, Казань, ул. Университетская, 17

Alexander.Lapin@ksu.ru, dos@ksu.ru

Рассмотрен класс сеточных вариационных неравенств, которые могут быть записаны в форме следующей системы уравнений (включений) в R^N:

$$Au + B\gamma + \delta = f; \ \ \gamma \in Cu, \ \ \delta \in Du, \tag{1}$$

где A, B – M-матрицы и C, D – диагональные максимально монотонные операторы. Схемы конечных элементов и конечные разностные схемы для различных задач со свободными границами сводятся к конечной разностной схеме (1), неявной сеточной схеме (с фиксированным временем) для задачи Стефана с заданной конвекцией. Доказаны существование и единственность решения задачи (1), а также возможность применения к ней конвергенции итерационных методов релаксации, включающих альтернативный метод Шварца и метод мультирасщепления. Итерационные методы, основанные на декомпозиции областей для линейных уравнений, подробно рассмотрены в книгах [1, 2]. Более общий случай задачи (1) с любыми M-матрицами B и $D = 0$ изучен в [3].

Предположим, что

$$A, B \text{ являются } M-\text{матрицами}, \tag{2}$$

$$C, D - \text{диагональные максимально монотонные операторы в } R^N, \tag{3}$$

т. е.

$$Cu = (c_1(u_1), c_2(u_2), ..., c_N(u_N))^t,$$

$$Du = (d_1(u_1), d_2(u_2), ..., d_N(u_N))^t,$$

где c_i, d_i – одномерные максимально монотонные операторы. Используем систему обозначений: $u \gg 0$ для покомпонентно упорядоченных векторов, т. е. $u \gg 0 \Leftrightarrow u_i \geq 0 \quad \forall i$, и аналогично $B \gg 0 \Leftrightarrow b_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$. Далее предположим, что существуют нижнее и верхнее решения $(\underline{u}, \underline{\gamma}, \underline{\delta})$, $\underline{\gamma} \in C\underline{u}$, $\underline{\delta} \in D\underline{u}$, $(\overline{u}, \overline{\gamma}, \overline{\delta})$, $\overline{\gamma} \in C\overline{u}$, $\overline{\delta} \in D\overline{u}$ задачи (1):

$$(\underline{u}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}) \ll (\overline{u}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}), \quad A\underline{u} + B\underline{\gamma} + \underline{\delta} \ll f \ll A\overline{u} + B\overline{\gamma} + \overline{\delta}. \tag{4}$$

Доказана

Теорема 1. *Если выполнены условия (2)–(4), то уравнение (1) имеет решение (u, γ, δ) для любого $f \in R^N$.*

Предположим теперь, что

$$A, B - \text{слабо доминирующие по столбцам диагональные матрицы.} \tag{5}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2)–(5), а также одно из следующих условий:*

(a) A или B – строго доминирующие по столбцам диагональные матрицы;

или

(b) C либо непрерывно монотонный, либо строго максимально монотонный оператор;

или

(c) $\exists \alpha > 0 : A - \alpha B$ – слабо доминирующая по столбцам M-матрица.

Допустим, что $(u^1, \gamma^1, \delta^1)$ и $(u^2, \gamma^2, \delta^2)$ – решения уравнения (1) с правыми частями f^1 и f^2 соответственно. Тогда из условия $f^1 \gg f^2$ следуют неравенства $u^1 \gg u^2$, $\gamma^1 \gg \gamma^2, \delta^1 \gg \delta^2$.

Используя теорему 2, можно доказать монотонную сходимость итерационных методов блочной релаксации к решению задачи (1), когда начальное приближение совпадает с верхним или нижним решением.

Пусть $A = A_0^l - A_1^l$, $B = B_0^l - B_1^l$ есть расщепления матриц для $l = 1, 2, ..., p$, причем A, B таковы, что: A_0^l, B_0^l – M-матрицы, $A_1^l \gg$

0, $B_1^l \gg 0$. Пусть также $E_l \gg 0$ – диагональные матрицы, $\sum_{l=1}^p E_l = Id$ – единичная матрица. Рассмотрим методы расщепления для решения задачи (1):

$$A_0^l v_l^{k+1} + B_0^l \eta_l^{k+1} + \delta_l^{k+1} = A_1^l u^k + B_1^l \gamma^k + f,$$

$$\eta_l^{k+1} \in C v_l^{k+1}, \ \delta_l^{k+1} \in D v_l^{k+1} \quad l = 1, 2, ..., p;$$

$$u^{k+1} = \sum_{l=1}^p E_l v_l^{k+1}; \ \gamma^{k+1} = \sum_{l=1}^p E_l \eta_l^{k+1}; \ \delta^{k+1} = \sum_{l=1}^p E_l \delta_l^{k+1} \tag{6}$$

для $k = 0, 1, 2, ...$ с начальным приближением (u^0, γ^0).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 для задачи (1) и условие (c) теоремы 2, а также совместимы расщепления матриц A и B:*

$\forall l \ \exists \alpha_l > 0 : A_0^l - \alpha_l B_0^l$ *– слабо преобладающие по столбцам диагональные M-матрицы.*

Тогда:

(a) итерационный метод (6) может быть применен для любого начального приближения (u^0, γ^0) из упорядоченного интервала $< (\underline{u}, \underline{\gamma}), (\overline{u}, \overline{\gamma}) >$;

(b) если $(u^0, \gamma^0) = (\overline{u}, \overline{\gamma})$ $((u^0, \gamma^0) = (\underline{u}, \underline{\gamma}))$, то последовательность $\{(u^k, \gamma^k, \delta^k)\}$ монотонно сходится снизу (сверху) к единственному решению $(u^*, \gamma^*, \delta^*)$ задачи (1).

Рассмотрим теперь вариационное неравенство, которое можно трактовать как упрощенную модель фильтрации жидкости в пористой среде под действием силы гравитации по направлению x_1 и с граничным условием полупроницаемости на части границы.

Пусть $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ – прямоугольная область с границей $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_N \cup \Gamma_s$, где $\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega : x_1 = 0\}$, $\Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega : x_1 = l_1\}$, $\Gamma_N = \{x : 0 < x_1 < l_1; x_2 = 0\}$, $\Gamma_s = \{x : 0 < x_1 < l_1; x_2 = l_2\}$. Пусть далее $V = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0 \text{в} \Gamma_1\}$, $V^0 = \{u \in V : u(x) = 0 \text{в} \Gamma_0\}$, $V^z = \{u \in V : u(x) = z(x) \text{в} \Gamma_0\}$, где $z(x) > 0$ – заданная функция. Определим также замкнутое выпуклое множество $K = \{u \in V^z : u(x) \geq 0 \text{ в } \Gamma_s\}$ и поставим задачу: найти $u \in K$, $\gamma \in L_\infty(\Omega)$, такие, что

$$-div(k(x)\nabla u(x)) + \partial\gamma/\partial x_1 = 0; \tag{7}$$
$$\gamma(x) \in H(u(x)),\ \forall x \in \Omega;$$
$$u(x) = z(x) \text{ в } \Gamma_0,\ \ u(x) = 0 \text{в } \Gamma_1,\ \ \partial u/\partial n(x) = 0 \text{ в } \Gamma_N;$$
$$u(x) \geq 0,\ \partial u/\partial n(x) \geq 0,\ u(x) \cdot \partial u/\partial n(x) = 0 \text{ в } \Gamma_s$$

с единичным вектором n наружной нормали к $\partial\Omega$. Здесь $H(.)$ – максимально монотонный оператор функции Хевисайда, $k(x) \in C(\overline{\Omega})$, $k(x) \geq k_0 > 0\ \ \forall x \in \overline{\Omega}$.

Для решения задачи (7) описанным итерационным методом были проведены численные эксперименты на сетевом кластере с применением параллельнных вычислений. Численные эксперименты подтвердили сходимость метода. Средняя невязка, вычисляемая на каждом шаге итерационного метода для всех точек области Ω, монотонно стремилась к 0. Для достижения среднего значения невязки $R < \varepsilon = 10^{-3}$ требовалось около 300 итераций. При расщеплении области Ω и распараллеливании вычислительного процесса достигался результат ускорения до 250% от времени работы на одном компьтере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Saad Y. *Iterative methods for sparce linear systems.* – PWS Publ. Comp., Boston, 1996.

2. Smith B., Björstad P. and Gropp W. *Domain decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations.* – Cambridge University Press, New York, 1996.

3. Lapin A. *Iterative solution for two classes of mesh variational inequalities.* Preprint, July 1999, Dep. of math. sci., University of Oulu, 29 p., 1999.